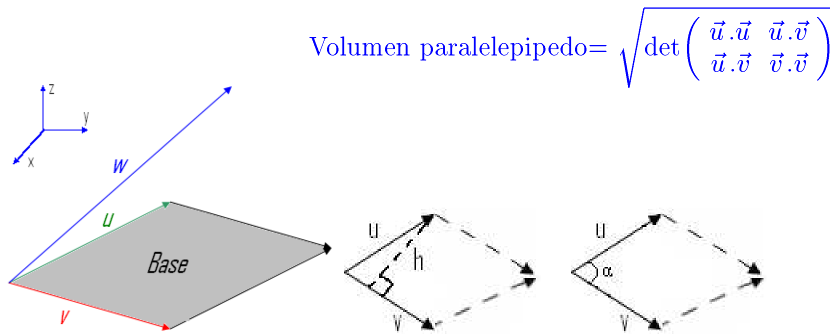
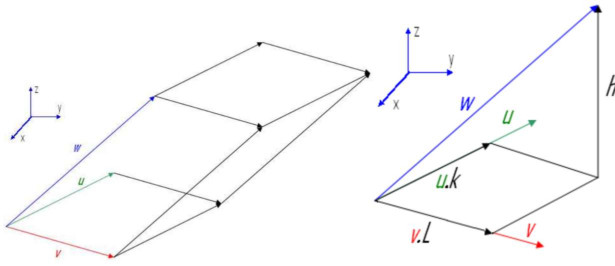
Área de un Paralelepipedo formado por 3 vectores R^3

Se busca demostrar que el volumen de el paralelepipedo formado por 3 vectores en R^3 se puede hallar resolviendo $V = \sqrt{\det\left(\begin{pmatrix} \vec{u} & \vec{u}.\vec{v} & \vec{u}.\vec{w} \\ \vec{u}.\vec{v} & \vec{v}^2 & \vec{v}.\vec{w} \\ \vec{u}.\vec{w} & \vec{v}.\vec{w} & \vec{w}^2 \end{pmatrix}\right)}$ partiendo unicamente de las 3 componentes respectivas de cada vector.

Volumen paralelepipedo= $\sqrt{\det\begin{pmatrix} \vec{u}.\vec{u} & \vec{u}.\vec{v} \\ \vec{u}.\vec{v} & \vec{v}.\vec{v} \end{pmatrix}}$



$A= L\ .\ h$	- Ecuación del área de un paralelogramo
$A= \|\vec{v}\|\ .\boldsymbol{h}$	- $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ son vectores $\mathbb{R}^3$, $\mathbf{h}$ es la altura del
$h= \|\vec{u}\|\ .\ \mathbf{Sen}\ \boldsymbol{\alpha}$	paralelogramo, $\boldsymbol{\alpha}$ es el angulo entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$
$A^2 = \|\vec{v}\|^2\ .\ \boldsymbol{h}^2$	- $A^2 = L^2\ .h^2$
$A^2 = \|\vec{v}\|^2 . \|\vec{u}\|^2 . (\mathbf{Sen}\ \alpha)^2$	
$A^2 = \vec{v}^2\ .\ \vec{u}^2\ .\ \mathbf{Sen}^2\ \alpha$	- $\|\vec{a}\|^2 = \vec{a}.\vec{a} = \vec{a}^2$ donde $\vec{a}$ es un vector
$= \vec{v}^2\ .\ \vec{u}^2 .\ \mathbf{Sen}^2\ \alpha$	
$= \vec{v}^2\ .\ \vec{u}^2 . (1 - \mathbf{Cos}^2\ \alpha)$	- $\mathrm{Sen}^2\ \Theta + \mathrm{Cos}^2\Theta = 1$
$= \vec{v}^2\ .\ \vec{u}^2 - (\mathbf{Cos}\ \alpha)^2\ .u^2\ .v^2$	- $(\mathrm{Cos}\ \Theta)^2 = \mathrm{Cos}^2\Theta$
$= \vec{v}^2\ .\ \vec{u}^2 - \left(\frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|}\right)^2 .\vec{u}^2.\vec{v}^2$	- $\mathrm{Cos}\Theta = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{\|\vec{a}\|.\|\vec{b}\|}$ donde $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son vectores
$= \vec{v}^2\ .\vec{u}^2 - \left(\frac{(\vec{u}.\vec{v})^2}{(\vec{u}.\vec{v})^2}\right).\vec{u}^2.\vec{v}^2$	- $\|\vec{a}\|^2 = \vec{a}.\vec{a} = \vec{a}^2$ donde $\vec{a}$ es un vector
$= \vec{v}^2\ .\ \vec{u}^2 - (1).(\vec{u}.\vec{v})^2$	
$(\text{Area base})^2 = \det\begin{pmatrix} \vec{u}.\vec{u} & \vec{u}.\vec{v} \\ \vec{u}.\vec{v} & \vec{v}.\vec{v} \end{pmatrix}$	- $\det\begin{pmatrix} a & b \\ d & c \end{pmatrix} = a.c - b.d$



$$V = B\ .\ h \qquad \text{- Ecuación del volumen del paralelepipedo}$$

$$V^2 = B^2 .\, h^2$$

$$B^2 = \det\begin{pmatrix} \vec{u}.\vec{u} & \vec{u}.\vec{v} \\ \vec{u}.\vec{v} & \vec{v}.\vec{v} \end{pmatrix} \qquad \text{- como se demostro en la parte posterior}$$

$$\vec{h} = \vec{w} - (\vec{u}.k + \vec{v}.l) \qquad \text{- } k \text{ y } l \text{ son escalares}$$

$$h^2 = (\vec{w} - (\vec{u}.k + \vec{v}.l))^{\mathbf{2}} \qquad \text{- } \|\vec{a}\|^2 = \vec{a}.\vec{a} = \vec{a}^2 \quad \text{donde } a \text{ es un vector}$$

$$V^2 = \det\begin{pmatrix} \vec{u}.\vec{u} & \vec{u}.\vec{v} \\ \vec{u}.\vec{v} & \vec{v}.\vec{v} \end{pmatrix} .h^2$$

$$= \det\begin{pmatrix} \vec{u}^2 & \vec{u}.\vec{v} & 0 \\ \vec{u}.\vec{v} & \vec{v}^2 & 0 \\ 0 & 0 & h^2 \end{pmatrix}$$

$$= \det(\begin{pmatrix} \vec{u}^2 & \vec{u}.\vec{v} & \vec{u}.\vec{h} \\ \vec{u}.\vec{v} & \vec{v}^2 & \vec{v}.\vec{h} \\ \vec{u}.\vec{h} & \vec{v}.\vec{h} & h^2 \end{pmatrix}) \qquad \text{- } \vec{u} \text{ y } \vec{v} \text{ son ortogonales a } \vec{h};\ \vec{u}.\vec{h} = \vec{v}.\vec{h} = 0$$

$$= \det(\begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \\ h \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \\ h \end{pmatrix}^t)$$

$$= \det(\begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \\ \vec{w} - \vec{u}.k - \vec{v}.l \end{pmatrix}).\det(\begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \\ \vec{w} - \vec{u}.k - \vec{v}.l \end{pmatrix}^t) \qquad \text{- } \det(A.B) = \det(A).\det(B)$$

$$= \det(\begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \\ \vec{w} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -k & -l & 1 \end{pmatrix}).\det(\begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \\ \vec{w} \end{pmatrix}^t . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -k & -l & 1 \end{pmatrix}^t) \qquad \text{- por sistema homogeneo}$$

$$= \det(\begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \\ \vec{w} \end{pmatrix}).\det(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -k & -l & 1 \end{pmatrix}).\det(\begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \\ \vec{w} \end{pmatrix}^t).\det(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -k & -l & 1 \end{pmatrix}^t)$$

$$= \det(\begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \\ \vec{w} \end{pmatrix}).1.\det(\begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \\ \vec{w} \end{pmatrix}^t).1$$

$$V = \sqrt{\det(\begin{pmatrix} \vec{u} & \vec{u}.\vec{v} & \vec{u}.\vec{w} \\ \vec{u}.\vec{v} & \vec{v}^2 & \vec{v}.\vec{w} \\ \vec{u}.\vec{w} & \vec{v}.\vec{w} & \vec{w}^2 \end{pmatrix})}$$

* El marco teorico fue tomado de http://descartes.cnice.mecd.es/, enciclopedia matematica del govierno Español, y desarrollado por mí.